Title	代数曲面の退化について
Author(s)	上野, 健爾
Citation	代数幾何学シンポジューム記録 (1979), 1979: 85-99
Issue Date	1979-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/212578
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

代数幾何学シンポジウム記録
1979年度 pp.85-99

代数曲面の退化について

京大理 上野健爾

§1 問題の設定

$\varphi : M \longrightarrow D = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \varepsilon\}$ を3次元複素多様体 M より D への固有正則写像とし，$D^* = D - \{0\}$ とおく時，$\varphi^{-1}(D^*) \longrightarrow D^*$ は smooth な写像であり，各ファイバーは連結と仮定する。従って D^* 上のファイバーはコンパクト2次元複素多様体（以下曲面と呼ぶ）である。$\varphi = 0$ で定まる M の因子 $\sum n_i S_i$ を φ の原点上の特異ファイバーと呼ぶ。特異ファイバーの既約成分 S_i の非特異モデルを S_i^* とする時，S_i^* の m－種数 $P_m(S_i^*) = h^0(S_i^*, mK_{S_i^*})$，小平次元 $\kappa(S_i^*)$ を S_i の m－種数 $P_m(S_i)$，小平次元 $\kappa(S_i)$ と定める。これは P_m, κ が双有理型不変量であることにより，非特異モデルのとり方によらずに一意的に定まる。

さて $t \in D^*$ 上のファイバー $M_t = \varphi^{-1}(t)$ を φ の一般ファイバーと呼ぼう。Iitaka [3] によって

任意の2点 $t, t' \in D^*$ に対して

$$P_m(M_t) = P_m(M_{t'}), \quad m = 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

$$\kappa(M_t) = \kappa(M_{t'})$$

が知られている。そこで $P_m(M_t)$ と $P_m(S_i)$, $\kappa(M_t)$ と $\kappa(S_i)$ との関係が問題になる。

予想　$P_m(M_t) \geq P_m(S_i)$, $i = 1, 2, 3, \cdots$
$\kappa(M_t) \geq \kappa(S_i)$

この小論の結論として、φ が射影的であれば小平次元に関しては予想が正しいことが分かる。このことは既に Persson が $\kappa(M_t) = 0$ 以外の時に正しいことを示しており、$\kappa(M_t) = 0$ の場合も Kulikov [4], Persson - Pinkham [7], Namikawa [5] の結果に帰着させることで証明は完了する。しかしながら、φ が射影的であるという条件は極めて強いので、本論ではできるだけこの条件を仮定せずに予想を研究してみる。$\kappa(M_t) = 1$ の場合は常に $\kappa(S_i)$ は $\kappa(M_t)$ 以下であることが示されるが、$\kappa(M_t) = 0$ の場合は φ が射影的であることを仮定しないと今の所よく分からない。

上の予想は M が Kähler 多様体である時は正し

いように思われるが，M が non-Kähler の時予想の成否を確かめることは興味ある問題である。これはVII型曲面が $\kappa \geq 0$ なる曲面に退化することがあるかという問題を含んでいることに注意しておく。

一方，P_m に関しては本論の方法では考察することは不可能である。特殊な degeneration に関しては Wilson [8] によって予想が成立することが確かめられている。

§2. 補題

ここでは予想の証明のために必要ないくつかの補題を証明する。

<u>補題 1</u>．$\varphi : M \longrightarrow D$，$\psi : N \longrightarrow D$ を共に §1の条件を満たす曲面の族とする。もし φ と ψ とが双有理型同値であれば，φ に関して予想が成立することと ψ に関して予想が成立することは同値である。

証明）仮定によって M を non-singular center で blowing-up を何度かして M^* を作り，

$$\begin{tikzcd} & M^* \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\varpi"] & \\ M \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"] & & N \arrow[dl, "\psi"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

なる可換図式を得る。ここで ϖ は双有理型写像、M の blowing-up によっては ruled surface しか生じないから、φ に関して予想が成立することと $\varphi^* = \varphi \circ \pi$ に関して予想が成立することは同値。$\varphi^* = 0$ で定まる特異ファイバーの ϖ による像は ψ の特異ファイバーに一致する。よって S_i を ψ の特異ファイバーの既約成分とすると S_i^* なる φ^* の特異ファイバーの成分で $\varpi(S_i^*) = S_i$ なるものが存在する。M に関して予想が成立すれば

$$P_m(S_i) \leq P_m(S_i^*) \leq P_m(\text{general fibre of } \varphi) = P_m(\text{general fibre of } \psi)$$
$$\kappa(S_i) \leq \kappa(S_i^*) \leq \kappa(\text{general fibre of } \varphi) = \kappa(\text{general fibre of } \psi)$$

が成立し、従って N に関して予想が成立つ。

逆も同様　　　　　　　　　　　　　　　　証明終)

同様にして次の補題も証明される。

<u>補題 2.</u>　$\varphi: M \longrightarrow D$ を上述の通りとする。

$$\hat{D} = \{ s \in \mathbb{C} \mid |s| < \varepsilon^{1/m} \} \ni s \longmapsto s^m = t \in D = \{ t \in \mathbb{C} \mid |t| < \varepsilon \}$$

なる m 重被覆をとり $\hat{\varphi}: \hat{M} \longrightarrow \hat{D}$ を $M \times_D \hat{D} \longrightarrow \hat{D}$ の非特異モデルとする。この時 $\hat{\varphi}$ に関して予想

が成立たてばφに関しても予想が成立つ。

更に次の補題も同様の証明できる

<u>補題3</u>. $\varphi: M \longrightarrow D$, $\psi: \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{D}$ は共に上の仮定を満足し, $\pi: \widetilde{M} \to M$, $p: \widetilde{D} = \{s \in \mathbb{C} \mid |s| < \varepsilon^{1/m}\} \ni s \longmapsto s^m = t \in D = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \varepsilon\}$ なる全射が存在して、$\varphi \circ \pi = p \circ \psi$ が成立していると仮定する。更に $\widetilde{D}^*$の点 s に対して $\kappa(\widetilde{M}_s) = \kappa(M_{p(s)})$ が成立しているとする。この時 ψに関して κに関する予想が成立すれば, φ に関しても κに関する予想が成立する。

以上の準備のもとに $\kappa(M_t)$の値に応じて議論を進めてゆく。$\kappa(M_t) = 2$の時はκに関する予想は自明である。

§3 $\kappa(M_t) = 1$.

<u>命題1</u>. $\varphi: M \longrightarrow D$ を上述の通りとし、一般ファイバー M_tに関して $\kappa(M_t) = 1$ とする。この時特異ファイバーの任意の成分 S_iに対して

$$\kappa(S_i) \leq \kappa(M_t)$$

が成立する.

証明) $\kappa(M_t) = 1$であれば, m を十分大なる正

整数とすると $\Phi_{mK(M_t)}: M_t \longrightarrow C_t = \Phi_{mK(M_t)}(M_t) \subset \mathbb{P}^{P_m(M_t)-1}$ は楕円曲線としての構造を与える。しかも m は M_t に独立に定めることができる。このことより

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[r, dashed, "g"] & \mathrm{Proj}(\varphi_* \mathcal{O}_M(mK_M)) = X \arrow[dl] \\
D &
\end{tikzcd}
$$

なる可換図式が定まる。ここで $g: M \dashrightarrow X$ は有理型写像であり, $\varphi^{-1}(D^*)$ 上では正則かつ $g|M_t = \Phi_{mK(M_t)}$ となっている。そこで補題1によって g は正則写像と仮定してよい。更に $g(M)$ は2次元複素解析空間であるが, それの非特異モデルをとって Y とし, 更に M も適当にモデルをとりかえることによって

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[r, "g"] & Y \arrow[dl, "\pi"] \\
D &
\end{tikzcd}
$$

なる可換図式を得る。ここで $\pi^{-1}(t) = \Phi_{mK(M_t)}(M_t) = C_t$, $t \in D^*$ であり, g の一般ファイバーは楕円曲線となっている。S_i を φ の特異ファイバーの既約成分とする。$g(S_i)$ が Y の曲線であるとすれば $S_i \longrightarrow g(S_i)$ の一般ファイバーは楕円曲線の

退化として出てくるもの，即ち楕円曲線もしくは有理曲線である。よってS_iは楕円曲面，又は線織面となり $\kappa(S_i) \leq 1$となる。

そこで$g(S_i)$が1点pとなる場合を考える。この時は点pでYをblowing-upして$\overline{Y}$を得，Mも適当にblowing upして$\overline{g}: \overline{M} \to \overline{Y}$なる正則写像を得る。この時$S_i$の$\overline{M}$へのstrict transformを$\overline{S_i}$とすると，$\overline{g}(\overline{S_i})$は曲線又は1点となる。曲線になる時は$\kappa(\overline{S_i}) = \kappa(S_i)$より上の論法が使える。1点になる時は再びblowing upをし，この操作を有限回行うことによって最終的に$g(S_i)$が曲線の時に帰着され，命題が証明された。

§4 $\kappa(M_t) = 0$

続いて一般ファイバーM_tの小平次元0の場合を考える。この場合はφが射影的でないと予想が正しいことが証明できないが，まず一般的に考えてみることにする。

補題.4 $\varphi: M \to D$を上述の通りとし更に$\kappa(M_t) = 0$, $t \in D^*$かつ$p_g(M_t) = 0$とする。この時
$\tilde{\varphi}: \tilde{M} \to \hat{D} = \{s \in \mathbb{C} \mid |s| < \varepsilon^{1/m}\}$, $\varpi: \tilde{M} \to M$ 全射正則

写像で $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{D}^*) \longrightarrow \varphi^{-1}(D^*)$ は有限次不分岐写像，$p: \tilde{D} \ni s \longmapsto s^m = t \in D$，$p\circ\tilde{\varphi} = \varphi\circ\varpi$ なるファイバー空間 $\tilde{\varphi}$ でその一般ファイバー $\tilde{M}_t$ が $\kappa(\tilde{M}_t)=0$，$p_g(\tilde{M}_t)=1$ なるものが存在する。

証明) $P_k(M_t)=0$ $1 \leq k \leq n-1$，$P_n(M_t)=1$ とすると $H^0(M, nK_M)$ は 0 でない切断 ω をもつ。この時 $\omega=0$ なる因子に沿った n 重分岐被覆 $\hat{M}$ をとり，$\hat{M}$ を $\hat{M}$ の正規化とすると $\hat{M} \to \hat{M}$ は $\varphi^{-1}(0)$ 以外では不分岐。$\tilde{M}$ を $\hat{M}$ の非特異モデルとし

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\tilde{\varphi}"] & \\ D & \tilde{D} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

を $\tilde{M} \longrightarrow D$ の Stein 分解とするとこれが求めるものである。 証明終)

上の証明で φ が射影的であれば $\tilde{\varphi}$ も射影的であることに注意しておく。

補題3と補題4とによって，予想を解くためには一般ファイバー M_t に関して $p_g(M_t)=1$ と仮定してよいことになる。この時次の補題が成立する。

補題5　$\varphi: M \longrightarrow D$ は上述の通りとし，更に $\kappa(M_t)=0$, $p_g(M_t)=1$ が任意に $t\in D^*$ に対して成立すると仮定する。また φ は射影的であると仮定する。この時 $\pi: \hat{D} \longrightarrow D$ なる原点でのみ分岐した有限次被覆及び $\hat{\varphi}: \hat{M} \longrightarrow \hat{D}$ なるファイバー空間で次の条件を満足するものが存在する。

1) $\hat{\varphi}$ は射影的

2) $s\in \hat{D}^*$ に対して $\hat{M}_s=\hat{\varphi}^{-1}(s)$ は $M_{\pi(s)}=\varphi^{-1}(\pi(s))$ の極小モデルである．

証明）$p_g(M_t)=1$ より $H^0(M, K_M)\ni \omega \neq 0$ なる元が存在する。$\omega=0$ で定まる因子の既約成分のうち $\varphi^{-1}(0)$ に含まれないものを $D_1, \dots, D_m$ とする。$D_i\cap M_t$ は例外曲線の有限和である。さて $D_1\cap M_t$ の既約成分に第一種例外曲線があるとする。$\kappa(M_t)=0$ より，$D_1\cap M_t$ に2本以上の第一種例外曲線が現われるとするとそれらは交わらない。従って $p: \tilde{D} \longrightarrow D$ なる原点で分岐した有限次被覆をとって，$\tilde{M}$ を $M\times_D\tilde{D}$ の非特異モデル，$\tilde{\omega}$ を ω の $\tilde{M}$ への引き戻しとする時，D_1 に対応する $\tilde{\omega}$ の成分は $\tilde{D}_{1,1}, \dots, \tilde{D}_{1,\ell}$ なる既約成分に分解

し、かつ $\widetilde{D}_{1,i}\cap\widetilde{M}_s$, $s\in\widetilde{D}^*$ は1本の例外曲線よりなるとしてよい。この時仮定より $\widetilde{D}_{1,1}\cap\widetilde{M}_s=C_s$ は第一種例外曲線としてよい。一方 φ は射影的であったので、$\widetilde{\varphi}:\widetilde{M}\longrightarrow\widetilde{D}$ も射影的となる。H を $\widetilde{\varphi}$-豊富な因子とし、$H_s=H\cap\widetilde{M}_s$ とおく。H_s と $\widetilde{D}_{1,1}\cap\widetilde{M}_s$ との $\widetilde{M}_s$ での交点数を l とする。そこで $\widetilde{H}=H+l\widetilde{D}_{1,1}$ とおくと $\widetilde{H}_s$ と $\widetilde{D}_{1,1}\cap\widetilde{M}_s$ との交点数は0。§3での論法を使うと

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{M} \arrow[r, dashed, "\pi"] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"'] & \mathrm{Proj}(\widetilde{\varphi}_*(\mathcal{O}(m\widetilde{H}))) \arrow[dl] \\
\widetilde{D} &
\end{tikzcd}$$

なる有理写像 π が作れ、$\pi(\widetilde{M})$ は $\widetilde{D}$ の原点以外のファイバーは非特異曲面で $\widetilde{M}_s$ の例外曲線 $\widetilde{D}_{1,1}\cap\widetilde{M}_s=C_s$ を blowing down したものに他ならない。ここで M_t に含まれる例外曲線は有限個であること、及び $\widetilde{M}_s$ は $s\in\widetilde{D}^*$ である限り $M_{p(s)}$ と同型にとれることに注意すれば、この操作を有限回繰返すことによって補題の証明が完了する。

注意 1) 上述の証明で本質的に用いたのは曲面 M_t は極小モデルを有しており、例外曲線を blow down してできるモデルは一意的であるという事実である。従って $\kappa(M_t)\geq 0$ であれば上述の証明を適用することができる。($p_g(M_t)=0$ であれば $P_m(M_t)\geqq 1$ なる正整数 m をとって、$H^0(M, mK_M)\ni\omega\neq 0$ の因子を考えればよい。M_t は極小モデルから blowing up して得られているから、こうして出て来る例外曲線は常に $|mK|$ の固定成分となっている。)

2) 上述の補題5は、φ が射影的を仮定しなくても成立すると思われる。

以上によって $\varphi: M \longrightarrow D$ は極小曲面の族であるとしてよい。更に $p_g(M_t)=1$, $\kappa(M_t)=0$ とすると、M_t はアーベル曲面もしくは K3 曲面である。φ が射影的であるとこれらの曲面の退化の双有理的分類はなされており、原点上のファイバーの既約成分はすべて $\kappa\leq 0$ であることが分かり、予想が証明される。(Namikawa [5], Kulikov [4], Pinkham–Persson [7].)

§5 $\kappa(M_t)=-\infty$

最後に一般ファイバーの$\kappa=-\infty$の時を考える。この時Mはケーラー多様体と双有理型同値であるとする。Fujiki [2] によって，この時MのD上の relative Douady space $\mathcal{D}_{M/D}$ の各既約成分はD上 proper である。さて一般ファイバーM_tはケーラーであり$\kappa(M_t)=-\infty$より，M_tは線織面もしくは有理曲面である。まず$q(M_t)\geq 1$の時を考える。この時 $\alpha: M_t \longrightarrow C_t=\alpha(M_t)\subset A(M_t)$ なるアルバネーズ写像を考えるとαの一般ファイバー$l_{t,x}$は$\mathbb{P}^1$である。$l_{t,x}$を含む$\mathcal{D}_{M/D}$の既約成分をS，$\mathcal{L}\to S$をS上の普遍族とする。$S\longrightarrow D$は proper であるので，Dの有限次被覆$\hat{D}$を適当にとると$\hat{D}$からSへの正則写像がありその像はDの上に全射で落ちる。そこで$\mathcal{L}\to S$なる族を$\hat{D}$上に引き戻したものを$\mathcal{L}_{\hat{D}}\to\hat{D}$としよう。一方$\hat{M}$を$M\times_D\hat{D}$の非特異モデルとすると，$\mathcal{L}_{\hat{D}}$より$\hat{M}$への有理型写像ができる。その像を$E$とすると$E$は$\hat{M}$の因子となり，$E\cap\hat{M}_s$は$\hat{M}_s$のアルバネーズ写像のファイバーとなっている。

従って再び上と同様にして

$$\begin{tikzcd} \hat{M} \arrow[rd, dashed, "\pi"] \arrow[d, "\hat{\varphi}"'] & \\ \hat{B} & \mathrm{Proj}(\hat{\varphi}_* \mathcal{O}(mE)) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

なる有理型写像πができる。$\hat{M}$の適当なモデルをとるとπは正則写像としてよい。すると$\dim \pi(\hat{M})=2$となり、$\pi : \hat{M} \longrightarrow \pi(\hat{M})$の一般ファイバーは$\mathbb{P}^1$となる。よって§3 命題1の論法と同様にして$\varphi^{-1}(0)$上の既約成分はすべて線織面であることが分かる。

最後に$q(M_t)=0$、即ち有理曲面の時を考える。必要があればDの有限次被覆をとることによって$\varphi : M \longrightarrow D$は正則切断$\sigma : D \longrightarrow M$をもつとしてよい。そこで$\sigma(D)$に沿って$M$を blow up したもの$\tilde{M}$を考えよう。すると$t \neq 0$に対して$\tilde{M}_t$は常に$\mathbb{P}^1$上への正則写像$\Phi : \tilde{M}_t \longrightarrow \mathbb{P}^1$をもちその一般ファイバー$l_x$は$\mathbb{P}^1$である。この時$l_x$の normal bundle は$\mathcal{O}_{l_x} \oplus \mathcal{O}_{l_x}$となり、$h^1(\mathcal{O}_{l_x})=0$ $h^0(\mathcal{O}_{l_x})=1$よりl_xは$\tilde{M}$内で2次元動くことができる。よってl_xを含む$\mathcal{D}_{\tilde{M}/D}$の既約成分を$S$とすると、$S$は$D$

上全射である。かくして $\kappa(M_t)\geq 1$ の場合と同じ論法が使えることになる。

以上の論文では $\mathcal{D}_{M/D}$ の既約成分が D 上 proper であることを本質的に用いた。M が本質的に非ケーラーである時にはこの事実は必ずしも成立しない。従って M が一般の時予想が成立するかどうかは極めて興味ある問題である。

文献

[1] Ashikaga, T. The deformation behaviour of the Kodaira dimension of algebraic manifolds, I. To appear.

[2] Fujiki, A. Closedness of the Douady spaces of compact Kähler spaces. Publ. RIMS. 14 (1978), p1—52.

[3] Iitaka, S. Deformations of compact complex surfaces. II J. Math. Soc. Japan. 22 (1970), 247—261.

[4] Kulikov, V.S. Degenerations of K3 surfaces and Enriques surfaces. Math. USSR Izvestija. 41 (1977) p957—989(英訳)

[5] Namikawa, Y. Toroidal degeneration of abelian varieties II, to appear.

[6]. Persson, U. On degeneration of algebraic surfaces, Mem. of American Math. Soc. 189 (1977)

[7] Persson, U. & Pinkham, H. Degeneration of surfaces with trivial canonical bundle, to appear.

[8] Wilson, P.M.H. The Behaviour of the Plurigenera of surfaces under algebraic smooth deformations. Inventiones Math. 47 (1978), 289 – 299